



O Efeito Aharonov-Bohm

Etevaldo Costa

IFSC - USP

10 de junho de 2018



Sumário

① Introdução

Equações de Maxwell

② Partícula sujeita aos potenciais eletromagnéticos

Mecânica Quântica na presença dos potenciais auxiliares

Derivada Covariante

Transporte Paralelo

③ O efeito Aharonov-Bohm

Fenda Dupla

Partícula confinada em um anel

Espalhamento



Equações de Maxwell

As equações de Maxwell descrevem a dinâmica do tensor eletromagnético, $F_{\mu\nu}$.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi J^\nu \quad (1)$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\nu F^{\alpha\beta} = 0 \quad (2)$$

O fato de $F_{\mu\nu}$ satisfazer a identidade Bianchi (2) implica que é possível escrevê-lo como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3)$$

Onde $A^\mu = \{\phi, \vec{A}\}$.



Vale notar que as equações dinâmicas (1) e (2), dependem de $F_{\mu\nu}$ e que o campo de calibre $A^\mu = \{\phi, \vec{A}\}$ é introduzido por conveniência. Existe assim, uma simetria local devido a escolha do campo de calibre,

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x)' = A_\mu(x) - \partial_\mu \xi(x)$$

Tal troca não altera o tensor eletromagnético.

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \partial_\nu \partial_\mu \xi - \partial_\mu \partial_\nu \xi = F_{\mu\nu} \quad (4)$$



Mecânica Quântica

O estado de uma partícula é dado ao se resolver a equação de Schrödinger

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$
$$\frac{\hat{p}^2}{2m}\psi + \hat{V}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Onde a função de onda que é solução da equação acima, escreve-se como:

$$\psi(t, \vec{x}) = f(t, \vec{x})e^{i\lambda(t, \vec{x})}$$



Mecânica Quântica na Presença dos Potenciais Auxiliares

Os estados são encontrados ao resolver a equação de Schrödinger com a Hamiltoniana.

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\varphi + V(\vec{x})$$

Isto é, resolver a equação, trocando as funções por operadores:

$$\frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{P}} - \frac{q}{c} \hat{\vec{A}} \right)^2 \Psi + q\hat{\varphi}\Psi + \hat{V}\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (5)$$

Com $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \xi$, tanto a função de onda, quanto a hamiltoniana se transformam,:

$$\frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{P}} - \frac{q}{c} \hat{\vec{A}} \right)^2 \Psi + q\hat{\phi}\Psi + \hat{V}\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$\frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{P}} - \frac{q}{c} \hat{\vec{A}}' \right)^2 \Psi' + q\hat{\phi}'\Psi' + \hat{V}\Psi' = i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t}$$

- $\hat{H} \rightarrow \hat{H}' = U\hat{H}U^{-1}$
- $\Psi \rightarrow \Psi' = U\Psi$

Onde $U = e^{ig\xi}$. Garante que os estados calculados em calibres diferentes representem a mesma física. Desse modo, a mecânica quântica acoplada com eletromagnetismo é invariante sob transformação de fase local.



Derivada Covariante

- Por que?

Devido a simetria $\Psi(x) \rightarrow e^{ig\xi(x)}\Psi(x)$ a derivada ordinária perde significado físico.

$$\eta^\mu \partial_\mu \Psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\Psi(x^\mu + \epsilon \eta^\mu) - \Psi(x^\mu))}{\epsilon}$$

- Como consertar?

Devolve-se a localidade para derivada introduzindo uma nova função com a lei de transformação $U(y, x) \rightarrow e^{ig\xi(y)} U(y, x) e^{-ig\xi(x)}$.

$$\eta^\mu D_\mu \Psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\Psi(x + \epsilon \eta) - U(x + \epsilon \eta, x) \Psi(x))}{\epsilon} \quad (6)$$



Encontra-se então a forma do *acoplamento mínimo* da mecânica quântica com os potenciais eletromagnéticos:

$$D_\mu \Psi(x) = \partial_\mu \Psi(x) + igA_\mu(x)\Psi(x) \quad (7)$$

Implicando assim que a derivada se transforme como um vetor:

$$\Psi(x) \rightarrow e^{ig\xi(x)}\Psi(x) \quad (8)$$

$$(D_\mu \Psi)(x) \rightarrow e^{ig\xi(x)} (D_\mu \Psi)(x). \quad (9)$$



Transporte Paralelo

Em um cenário aonde a invariância de calibre local é considerada, a fase adquirida pela função de onda é dependente do caminho escolhido para ligar os pontos inicial e final x_a e x_b . Considere uma curva γ dada parametricamente por $x^\mu(\sigma); \gamma : [0, \sigma]$. A relação entre a função de onda calculada em $\sigma = 0$ e a função em um ponto σ qualquer pertencente a γ é dada pelo transporte paralelo,

$$\frac{D\Psi}{D\sigma} = 0$$

$$\frac{d\Psi}{d\sigma} + igA_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \Psi = 0$$

O que leva à:

$$\Psi = \exp\left(-ig \int_\gamma A_\mu dx^\mu\right) \Psi_0 \quad (10)$$



Uma vez dado o caminho γ que conecta os pontos x_a e x_b , pode-se encontrar como uma variação da trajetória para γ' , dada por $x^\mu(\tau)$, altera a solução:

$$\delta \frac{d\psi(\gamma)}{d\sigma} + iq\delta(A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma})\psi(\gamma) + iqA_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta\psi(\gamma) = 0$$

$$\psi = \psi(\gamma) e^{-ig \int_\Sigma F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

Em uma região Σ onde $F_{\mu\nu}$ é zero, em todo ponto, o caminho γ pode ser distorcido sem alterar a função de onda.



Ao se assumir que funções de ondas calculadas por caminhos diferentes são independentes, a função de onda total, válida em todo espaço, se dá pela soma das funções de onda calculadas por todos caminhos possíveis. Seja então $C = \{\Gamma : [0, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}^3 : \Gamma(0) = x_a; \Gamma(\sigma) = x_b\}$ o espaço de todos caminhos entre o ponto inicial e final, x_a e x_b . Então, a função de onda total é dada por:

$$\Psi(x_b) = \int_C \exp\left(-ig \int_{\gamma} A_{\mu} dx^{\mu}\right) \Psi_0(\gamma) D\Gamma \quad (11)$$



(a) Yakir Aharonov

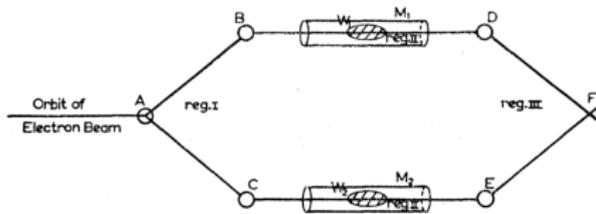


(b) David Bohm

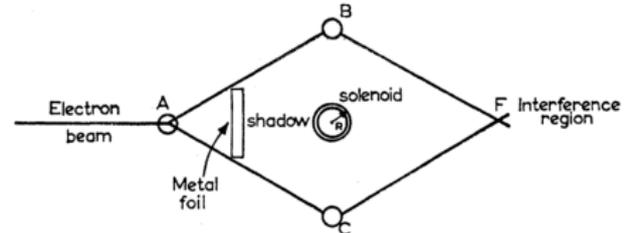
Figura

- Publicam *Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory*, *Phys.Rev.*, 115 : 485–491, Agost 1959.

No artigo original são sugeridos os seguintes arranjos experimentais para verificação dos efeitos dos potenciais na teoria quântica:



(a) Arranjo para o efeito AB elétrico



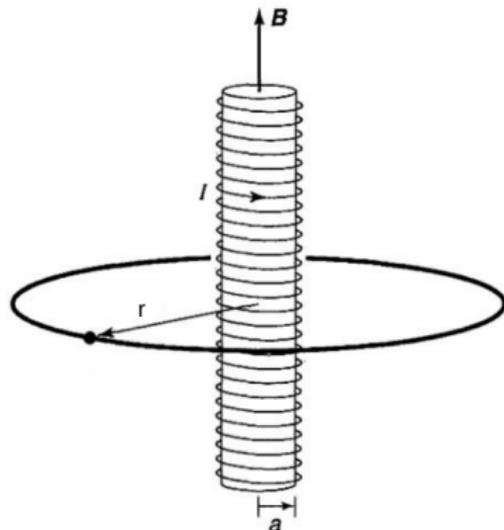
(b) Arranjo para o efeito AB magnético

Figura



Fixando

- Solenoide ideal \rightarrow campo magnético confinado, uniforme e constante.
- O fluxo magnético produzido é representado por Φ .
- O solenoide é intransponível ao elétron.
- O calibre é ficado em $\vec{A}_{ext} = \frac{\Phi \hat{\phi}}{2\pi r}$, para região exterior ao solenoide.



Fenda Dupla

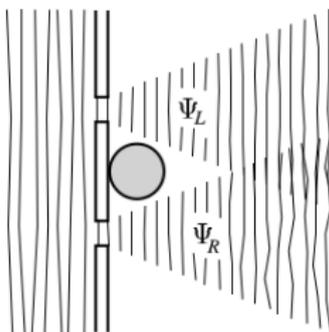
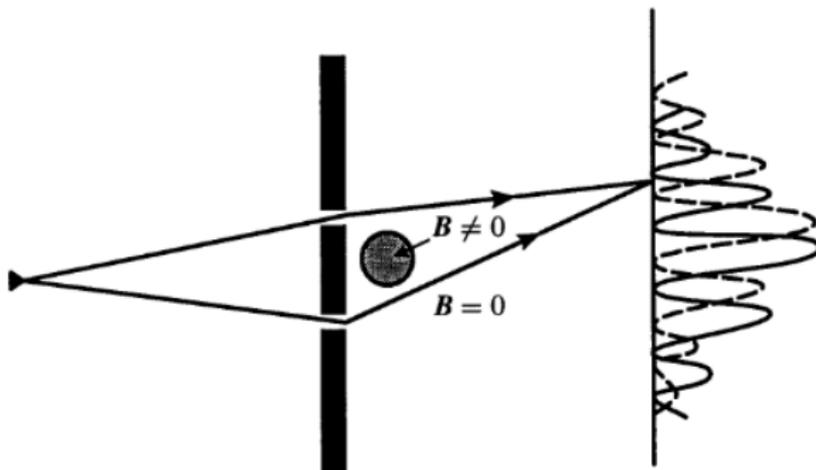


Figura: Esquema de fenda dupla do efeito AB.

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R$$

$$\Psi = \Psi_0(\gamma)e^{ig \int_{\gamma} A} + \Psi_0(\gamma')e^{ig \int_{\gamma'} A}$$

$$\Psi = e^{ig \int_{\gamma'} A} \left\{ \Psi_0(\gamma)e^{ig\Phi} + \Psi_0(\gamma') \right\}$$



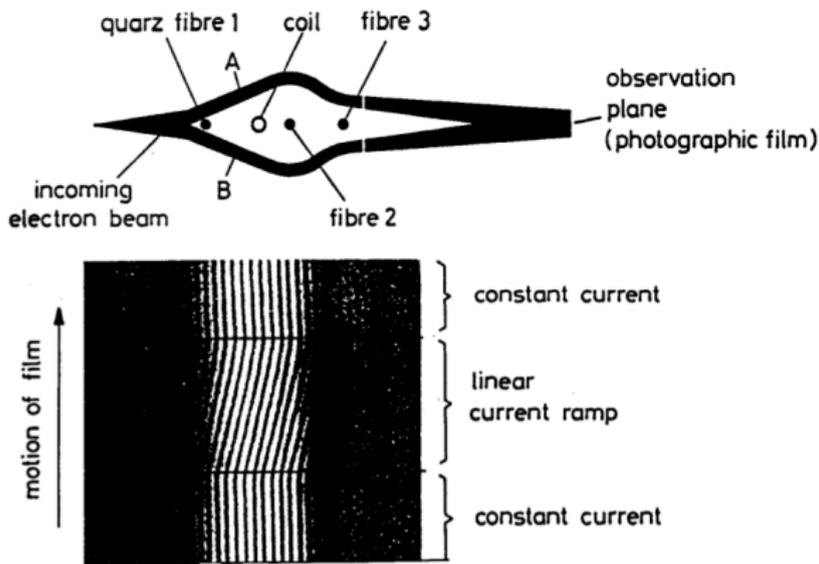
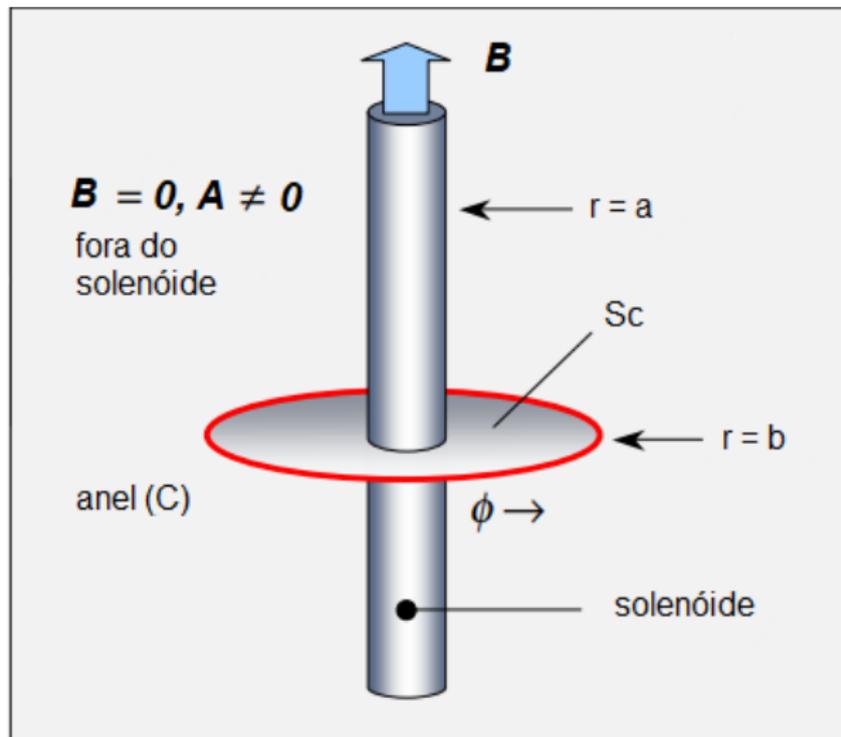


Figura: Feixe de elétrons é dividido coerentemente por uma fibra de quartzo, passando pela região com \vec{A} . Por fim, o feixe é juntado novamente formando o padrão de interferência.



Partícula confinada em um anel





$$\frac{1}{2m} (\hat{\vec{p}} - \frac{q}{c} \hat{\vec{A}}_{\text{ext}})^2 \Psi = E \Psi$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{-\hbar^2}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \left(\frac{q\Phi}{2\pi cb} \right)^2 + i \frac{\hbar q \Phi}{cb^2 \pi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \Psi = E \Psi$$

Definindo: $\beta \equiv \frac{-q\Phi}{hc}$, $k^2 \equiv \frac{2mE}{\hbar^2}$.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + i2\beta \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} + (k^2 b^2 - \beta^2) \Psi = 0$$

Ansatz: $\Psi \sim \exp(i l \phi)$.



$$-l^2 - 2l\beta + k^2 b^2 - \beta^2 = 0 \longrightarrow l = -\beta \pm |kb|$$

Condição de contorno $\Psi(0) = \Psi(2\pi)$; $l \in \mathbb{Z}$. Consequência:

- $E_l = \frac{\hbar^2}{2mb^2}(l + \beta)^2$
- $K_z = \hbar(l + \beta)$



Quantização do fluxo magnético

A quantização do fluxo magnético se dá somente em materiais supercondutores, devido ao efeito Meissner-Ochsenfeld, que exige:

$$\vec{j} = \frac{-i\hbar}{2m} (\Psi^* \vec{D}\Psi - \Psi(\vec{D}\Psi)^*) = \vec{0} \quad (12)$$



A função de onda de uma partícula carregada confinada em um anel e sujeita ao potencial vetor é o produto da função de onda da partícula livre com a contribuição de fase devida ao \vec{A} .

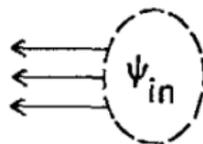
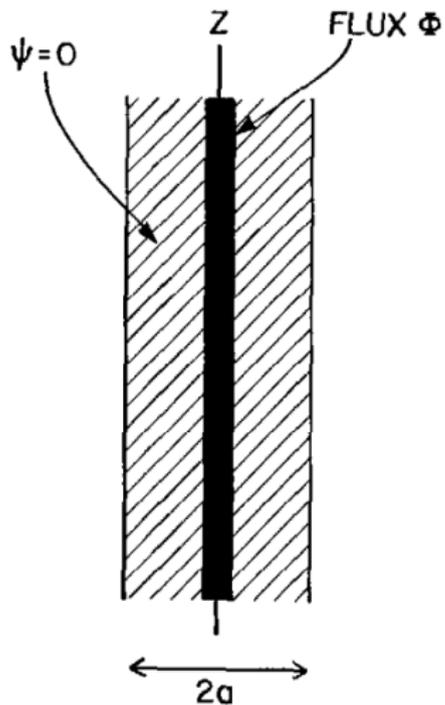
$$\psi \sim e^{\pm i|k|b\phi} e^{ig \int_{x_0}^{\phi} \vec{A} \cdot d\vec{l}} = e^{if(\phi)}$$

Como consequência de (12), encontra-se:

$$\begin{aligned} \nabla f(\phi) &= g\vec{A} \\ f(2\pi) - f(0) &= 2\pi n = g \oint d\vec{l} \cdot \vec{A} = g\Phi \\ \Phi &= \frac{hc}{q} n \end{aligned}$$



Espalhamento





O problema do espalhamento é o resolvido no artigo *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*.

$$\frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi(r, \phi) = E \Psi(r, \phi)$$

$$\rho^2 \frac{d^2 \chi}{d\rho^2} + \rho \frac{d\chi}{d\rho} + (\rho^2 - (l + \beta)^2) \chi = 0$$

Onde: $\beta \equiv \frac{-q\Phi}{ch}$, $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ e $\Psi(r, \phi) = \chi(r) \exp(il\phi)$ com $l \in \mathbb{Z}$.



Ao se impor a condição de contorno $\Psi(0, \phi) = 0$, a solução geral pode ser escrita como:

$$\Psi(\rho, \phi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^{|l+\beta|} J_{|l+\beta|}(\rho) e^{il\phi}$$

Que no assintótico $\rho \gg 1$, toma a forma:

$$\Psi = e^{-i\rho \cos \phi - i(\beta)\phi} + \frac{e^{i\rho} \sin(\beta\pi) e^{-i\phi(1/2+m)}}{(-2i\pi\rho)^{1/2} \cos(\phi/2)}$$

Onde a amplitude de espalhamento e a seção de choque diferencial são, respectivamente:

$$f(\phi) = \frac{e^{i\rho} \sin(\beta\pi) e^{-i\phi(1/2+m)}}{(-2i\pi)^{1/2} \cos(\phi/2)} \quad \sigma = |f(\phi)|^2 = \frac{\sin^2(\beta\pi)}{2\pi \cos^2(\phi/2)}$$

 Aharonov-bohm effect and geometric phase.

<http://www.physics.mcgill.ca/~keshav/551/berryphase.pdf>.
último acesso: 05/12/2017.

 Y. Aharonov and D. Bohm.

Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory.
Phys. Rev., 115:485–491, Aug 1959.

 Y. Aharonov and D. Bohm.

Further considerations on electromagnetic potentials in the quantum theory.
Phys. Rev., 123:1511–1524, Aug 1961.

 Y. Aharonov and D. Rohrlich.

Quantum Paradoxes: Quantum Theory for the Perplexed.
Physics textbook. Wiley, 2008.

 L.E. Ballentine.

Quantum Mechanics: A Modern Development